

3 维空间线与体对象间的拓扑关系完备性研究

张 骏 秦小麟 胡彩平

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京 210016)

摘 要 线与体是3维空间中两类重要的空间对象,对其之间的拓扑关系进行研究在地矿开采、交通运输等很多领域都有非常重要的应用价值。为了准确高效地对3维空间线与体,特别是复杂对象间的拓扑关系进行分析,首先定义了一类基本空间对象,同时用9交模型来表达空间对象之间的拓扑关系;然后利用线与体之间的9条否定规则推导出基本线与体之间可能存在的11种拓扑关系,再利用复合推导的方法来得到复合线对象与体之间的19种拓扑关系;最后得出了用于推导分析复杂线与体之间拓扑关系的算法。经过详细分析与讨论,证明了这些拓扑关系具有完备性。实践表明,利用完备拓扑关系,不仅可以保证推导分析算法的正确性,也能极大简化复杂线对象与体对象间拓扑关系的分析。

关键词 9交模型 拓扑关系 拓扑分析 拓扑关系完备性 线对象 体对象

中图法分类号: P208 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2009)03-0543-09

Completeness Research on Topological Relations Between 3D Spatial Objects of Lines and Bodies

ZHANG Jun, QIN Xiao-lin, HU Cai-ping

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract Lines and bodies are two important spatial objects in 3D space. Research on topological relations between lines and bodies have great value in many application fields such as mining, military and transportation. In order to analyze the topological relations between 3D lines and bodies especially complicated lines and bodies correctly and efficiently, a group of sample spatial objects are defined. Then nine-intersection model is used to describe the topological relations between spatial objects. Using nine negative conditions between lines and bodies, eleven types of topological relations between sample lines and bodies are deduced. Then the composed reasoning method is used to deduce the topological relations between compound lines and bodies and there are altogether nineteen types. Finally the algorithm to analyze the topological relations between complicated lines and bodies is deduced. After detailed analysis and discussion, the completeness of topological relations between lines and bodies is proved. Therefore, the algorithm can guaranteed the correctness and greatly simplify the analysis of the topological relations between complicated lines and bodies.

Keywords nine-intersection model, topological relations, topological analysis, completeness of topological relations, lines, bodies

1 引 言

由于空间信息在人类日常生活中大量存在,因

此对其进行表示和分析已经成为了一项非常重要的工作。当前虽然已有许多2维空间系统,如地理信息系统,空间数据库系统等,但随着应用的不断深入,采矿、建筑、交通、军事等很多行业都迫切需要能

基金项目:国家自然科学基金项目(60673127);国家高技术研究发展计划(863)项目(2007AA01Z404)

收稿日期:2007-01-25;**改回日期:**2007-10-24

第一作者简介:张 骏(1978~),男。现为南京航空航天大学硕博连读研究生。主要从事2、3维空间数据库技术研究。E-mail:zj_jun@nuaa.edu.cn

对 3 维空间数据信息进行分析和处理,简单的 2 维平面系统已不能满足实际需求。

3 维空间对象间存在着多种关系,如度量关系、顺序关系、拓扑关系等,其中最为有用的是拓扑关系,它表达了空间对象之间固定的不随观察角度以及放大缩小变化的性质,如包含、相邻、相离等。拓扑关系在空间信息查询、提高空间信息输入的准确性等多方面都有重要的应用^[1]。

线和体是 3 维空间中极为常见的两类空间对象,例如公路、铁道等是线的实例对象;煤层、建筑等为体的实例对象。3 维空间中线与体之间可能存在相邻、相交等多种拓扑关系,判断这些关系对于采矿、交通、军事等都有十分重要的意义。对于比较简单的空间线与体,其拓扑关系可比较容易地求得。而对复杂的空间线与体,一般无法直接进行分析,需通过推理的方法进行拓扑分析。若能确定线与体之间所有可能存在的拓扑关系,则必然可极大地简化复杂线与体之间拓扑关系的分析。

本文在前人研究的基础上,利用 9 交模型,通过对 3 维空间对象线与体之间的拓扑关系进行分析,得出了基本线与体之间所有可能存在的 11 种拓扑关系,以及复合线与体之间的 19 种拓扑关系,同时证明了这些拓扑关系的完备性,并提出了复杂线与体之间拓扑关系的推导分析算法,从而简化了复杂线与体之间拓扑关系的分析。

2 相关研究

空间推理是利用空间理论和人工智能技术对空间对象进行建模、描述和表示,并据此对空间对象间的空间关系进行定性或定量分析和处理的过程^[2]。当前对空间对象间拓扑关系的表示及推理主要有以下两个方向^[3]:一种是采用区域连接演算的方法;另一种是采用 9 交模型的方法。

区域连接演算(RCC)模型^[4]是 Randell 等人在 Clarke 的空间演算逻辑公理的基础上提出的拓扑模型。它以区域对象为基础,用一个原始二元组 $C(x, y)$ (表示区域 x 与 y 连通)推导出区域对象间的其他各种拓扑关系。常见的有 RCC-5 和 RCC-8 等模型,前者不考虑空间对象的边界,而后者则考虑区域对象边界之间的关系。RCC-8^[5]包括不连接(DC)、外部连接(EC)、部分交叠(PO)、正切真部分(TPP)、非正切真部分(NTPP)、相等(EQ)、反正切

真部分(TPPI)和反非正切真部分(NTPPI)等 8 种拓扑关系。所有 8 种拓扑关系互不相交且联合完备(JEPD)。

9 交模型^[6]是 Egenhofer 以点集拓扑学为理论依据,在 4 交模型的基础上提出的一种拓扑关系表达框架。它通过考察空间对象的内部、边界以及外部的相交情况来区分各种拓扑关系。两个空间对象内、外部以及边界之间共可构成 9 个交集,每一种空间拓扑关系都对应一种相交结果的组合。9 交模型除了考察空间对象的内部和边界外,同时还考虑了空间对象的外部。设 A° 表示空间对象内部, ∂A 表示空间对象边界, A^- 表示空间对象外部,则空间对象 A 与 B 一共可构成 $\partial A \cap \partial B$ 、 $A^\circ \cap B^\circ$ 、 $\partial A \cap B^\circ$ 、 $A^\circ \cap \partial B$ 、 $A^- \cap B^-$ 、 $A^- \cap \partial B$ 、 $A^- \cap B^\circ$ 、 $\partial A \cap B^-$ 和 $A^\circ \cap B^-$ 等 9 种相交组合(如下式所示)。

$$\begin{bmatrix} A^\circ \cap B^\circ & A^\circ \cap \partial B & A^\circ \cap B^- \\ \partial A \cap B^\circ & \partial A \cap \partial B & \partial A \cap B^- \\ A^- \cap B^\circ & A^- \cap \partial B & A^- \cap B^- \end{bmatrix}$$

基于 9 交模型, Clementini 等人提出了基于维数扩展的 9 交模型^[7],其主要改进是用 DIM() 函数对点集相交结果进行进一步细分,如果相交结果为空,则对应值取 -1,若为点,则取 0,若为线,则取 1,若为面,则取 2,这样就能更精确地区分各种空间拓扑关系。

利用 9 交模型, Egenhofer 等人研究了包含空洞的区域对象间的拓扑关系^[8],以及区域间的拓扑关系推理^[9];赵仁亮等人讨论了利用 Voronoi 图表示 9 交模型,并提出了进行拓扑关系分析的方法^[10]。

虽然 RCC 模型能表达区域对象之间拓扑关系,但它只能针对简单空间对象,不适用于 3 维空间对象之间的拓扑分析。由于 9 交模型在 2、3 维空间均有应用,适用面更广,且能很好地表达 2、3 维空间对象之间的拓扑关系^[11],因此目前已被开放地理空间协会(OGC)和国际标准化组织 ISO 采纳为用于拓扑关系表示的基本框架^[12]。

由于 9 交模型矩阵的每个元素均可为空或非空两种情况,因此理论上 9 交模型所能表达的空间拓扑关系共有 $2^9 = 512$ 种,但一般只有其中一小部分是实际空间对象间可能存在的拓扑关系。因此在运用 9 交模型时,需要对拓扑关系进行必要的“提炼”或“过滤”,许多学者,如 Bric、Zlatanova、陈军等人进行了简化 9 交模型的研究^[11,13-14]。

为更好进行空间拓扑分析,有以下空间对象间

拓扑关系完备性的概念。

定义 1 (空间对象间拓扑关系完备性): 经过抽象, 得出了两个空间对象间存在着的 n 种 9 交拓扑关系, 如果经过证明可知, 该空间对象间存在且仅存在这些 9 交拓扑关系, 则称这 n 种 9 交拓扑关系满足完备性, 而具有完备性的拓扑关系则构成完备集。

拓扑关系的完备性对于复杂空间对象间的拓扑分析有着极为重要的意义, 如果能够确定所有可能存在的拓扑关系, 那么便可大大简化空间对象间拓扑关系的分析。但当前对空间对象间拓扑关系的完备性分析还存在着许多不足: 例如大都局限于 2 维平面对象, 缺乏对 3 维空间对象间拓扑完备性的分析讨论, 由于 3 维空间对象间存在的拓扑关系比 2 维更多、更复杂, 因此无法简单地直接扩展; 有些学者, 如 Zlatanova 等人虽然也进行了 3 维空间对象间拓扑关系完备性的讨论^[11], 但并未进行严格的数学证明, 缺乏严谨性, 从而也无法得出是否具有完备性的结论。

3 基本线与体间拓扑关系完备性讨论

3.1 基本空间对象

由于现实世界中的空间线对象与体对象非常复杂, 因此若要分析它们之间可能存在的各种拓扑关系, 则首先需要化繁为简, 先分析简单的线与体之间可能存在的所有拓扑关系, 然后在此基础上才能进一步分析更为复杂的线与体之间的拓扑关系。本文采用 9 交模型来描述 3 维空间对象之间的拓扑关系。为了讨论方便, 还引入了 9 交拓扑关系编码的概念^[11]。

定义 2 (9 交拓扑关系编码): 设空间对象 A 和 B , A° 、 ∂A 、 A^- 分别表示 A 的内部、边界和外部, 对 9 个交集按如下顺序排序: $\partial A \cap \partial B$ 、 $A^\circ \cap B^\circ$ 、 $\partial A \cap B^\circ$ 、 $A^\circ \cap \partial B$ 、 $A^- \cap B^-$ 、 $A^- \cap \partial B$ 、 $A^- \cap B^\circ$ 、 $\partial A \cap B^-$ 和 $A^\circ \cap B^-$, 若相交不为空, 则记为 1, 否则记为 0, 每种相交组合可表示为一个二进制数, 转为十进制即形成 9 交拓扑关系编码。

每一种用 9 交模型表示的拓扑关系均可表示为相应的 9 交拓扑关系编码。例如, 当两个对象不相交时, 相应的二进制编码为 000 011 111, 由于其转为十进制即为 031, 因此可用 R031 表示这两个对象之间的拓扑关系, 命名为相离 (DISJOINT)。

为了简化讨论, 现特将一类 3 维基本空间对象定义如下:

定义 3 点 一个 3 维空间中的基本点对象 p (简称为点 p , 或直接简称 p) 由单个的点 (x, y, z) 所构成, 其边界为空集。

定义 4 线 一条 3 维空间中的基本线对象 l (简称为线 l , 或直接简称 l) 是仅由一对点 p_1 、 p_2 连接而成的线段, 其边界为 p_1 和 p_2 。

定义 5 面 一个 3 维空间中的基本面对象 r (简称为面 r , 或直接简称 r) 是由一组邻接的线 l_1, l_2, \dots, l_n 所围成的平面凸多边形, 内部不含空洞, 其边界为 l_1, l_2, \dots, l_n 构成的闭包。

定义 6 体 一个 3 维空间中的基本体对象 b (简称为体 b , 或直接简称 b) 是由一组邻接的面 r_1, r_2, \dots, r_n 所包围形成的凸多面体, 且内部不含空洞, 其边界为 r_1, r_2, \dots, r_n 构成的闭包。

基本点、线与体之间的拓扑关系是进一步分析复杂线与体之间拓扑关系的基础。点与体之间的拓扑关系比较简单, 只存在以下 3 种关系: 分别为相离、在内部、在表面。由于点集拓扑学中认为单个点的边界为空集, 因此其用 9 交拓扑关系编码可表示为 R029、R156 和 R060。

3.2 基本线与体之间拓扑关系完备性

基本线与体之间可能存在着多种拓扑关系, 对于它们之间存在的拓扑关系, 有如下引理成立。

引理 1 如果线 l 的边界与体 b 的外部不相交, 则线 l 的内部与体 b 的外部不相交, 并且线 l 的内部与体 b 的内部, 以及与体 b 的边界不同时相交。

证明 当 $\partial l \cap b^- = \emptyset$ 时, 线 l 的两个端点均位于体 b 的表面或内部。由于体 b 为凸多面体, 因此线 l 的内部不可能与体 b 的外部相交 (否则将出现线 l 的端点与体 b 的外部相交的情况)。此时, 线 l 与体 b 的关系可能存在以下 3 种情况:

(1) 若线 l 的两个端点都位于体 b 的内部, 则线 l 必定位于体 b 的内部, 因此 $l^\circ \cap b^\circ \neq \emptyset$, $l^\circ \cap \partial b = \emptyset$;

(2) 若线 l 的一个端点都位于体 b 的内部, 另一个端点位于体 b 的边界面上, 则线 l 必定位于体 b 的内部, 因此 $l^\circ \cap b^\circ \neq \emptyset$, $l^\circ \cap \partial b = \emptyset$;

(3) 若线 l 的两个端点都位于体 b 的边界上, 则可能出现以下两种情况:

① 若均位于体 b 的同一个面上, 则线 l 必位于体 b 的边界上, 因此有 $l^\circ \cap b^\circ = \emptyset$, $l^\circ \cap \partial b \neq \emptyset$;

② 若位于体 b 的不同的两个面上, 则线 l 必位于体 b 的内部, 因此有 $l^\circ \cap b^\circ \neq \emptyset$, $l^\circ \cap \partial b = \emptyset$ 。

由情况 (1) ~ 情况 (3) 可知, 当 $\partial l \cap b^- = \emptyset$ 时,

该引理成立。

证毕。

利用引理 1, 即可得出以下基本线与体之间拓扑关系的完备性定理:

定理 1 11 种 9 交拓扑关系构成了基本线与体之间的拓扑关系的完备集。

证明 根据 9 交模型的定义, 由于基本线与体之间理论上存在 512 种可能的拓扑关系, 因此需进行简化分析, 以排除实际不可能的情况。这里可采用 Zlatanova 提出的否定规则来对线与体之间的拓扑关系进行简化, 每条否定规则都可用于排除一些不可能存在的拓扑关系, 25 条否定规则^[11]中共有 8 条是关于 3 维空间中线与体的, 该 8 条否定规则为:

- (1) 线 l 与体 b 的外部永远相交;
- (2) 如果线 l 的边界与体 b 的外部相交, 那么线 l 的内部必定也与体 b 的外部相交;
- (3) 线 l 的边界至少与体 b 的内部、边界或外部之一相交;
- (4) 线 l 的外部总与体 b 的闭包 (包括边界与内部) 相交;
- (5) 线 l 的内部至少与体 b 的内部、边界或外部之一相交;
- (6) 如果线 l 的内部与体 b 的内部不相交, 则线 l 的边界与体 b 的内部也不相交;
- (7) 如果线 l 的内部与体 b 的内部及外部相交, 则它必与体 b 的边界相交;

(8) 线 l 的边界总与体 b 的内部、边界或外部最多两部分相交。

由于 Zlatanova 讨论的线对象是 ISO 标准的线串, 相对比基本线复杂, 因此还需将引理 1 作为第 9 条否定规则。

每条否定规则都可排除一定数量的拓扑关系: 如根据否定规则 (1), 由于线 l 与体 b 的外部永远相交, 因此 $l \cap b \neq \emptyset$ 成立。据此即可排除线与体之间形如 $[xxx \ x0x \ xxx]$ 的所有 9 交拓扑关系, 共为 256 种。在此基础之上, 可采用如上方法, 继续利用否定规则 (2) ~ (9) 来排除不可能存在的拓扑关系。表 1 列出了按照否定规则 (1) ~ (9) 的顺序依次排除的拓扑关系数, 共为 501 种。

表 1 利用 9 条否定规则排除基本线与体之间不可能的拓扑关系

Tab. 1 Eliminate impossible relations between basic line and body by 9 negative conditions

否定规则	1	2	3	4	5	6	7	8	9	合计
排除数	256	64	32	120	3	10	7	1	8	501

据此即可得出如图 1 所示的 11 种线与体之间的拓扑关系, 分别为相离 (R031, D)、相交 (R191、R225、R447, IT)、在内部 (R220、R412、R476, IN)、相邻接 (R287, M)、位于边界 (R316、R319, ON) 和被接触 (R063, TB)。

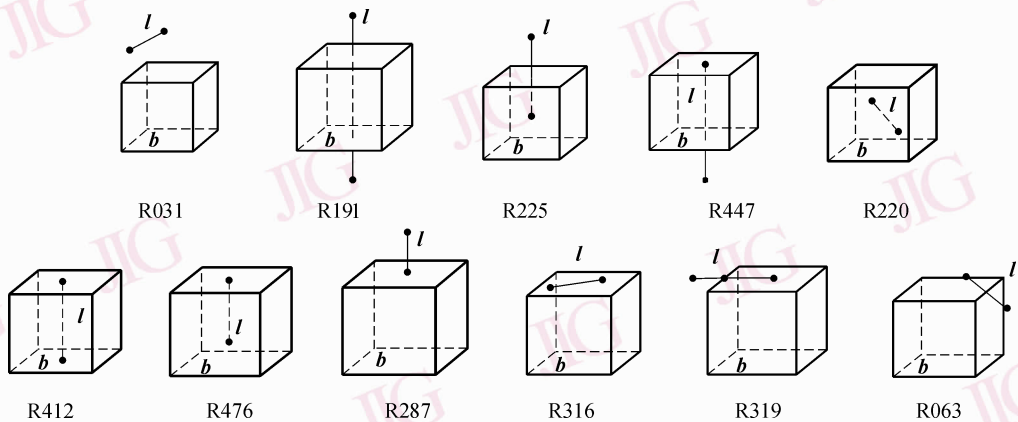


图 1 本文定义的基本线 l 与体 b 之间可能存在的 11 种拓扑关系
Fig. 1 11 topological relations between basic line of l and body object of b

以上说明了基本线与体之间至多存在这 11 种拓扑关系。

个端点与体的关系进行分类, 再得出可能存在的拓扑关系。

以下从另一角度进行分析: 首先对基本线的两

基本线对象的两个端点属于空间对象的边界。

由于单个点与体之间仅可能存在内部、在边界上和相离 3 种拓扑关系,因此线 l 的两个端点 p_1 与 p_2 之间共可能存在 6 种拓扑关系组合,分别对这 6 种情况进行分析,即可得出每种情况下,线 l 与体 b 之间可能存在的若干拓扑关系(证明过程从略),如表 2 所示:

表 2 线 l 与体 b 可能存在的拓扑关系

Tab. 2 Possible relations between line l and body b

情况	p_1 与 b	p_2 与 b	l 与 b 可能的 9 交拓朴关系
1	在内部	在内部	在内部 (R220)
2	相离	相离	相离 (R031)、相交 (R191)、被接触 (R063)
3	在边界上	在边界上	在内部 (R412)、在边界上 (R316)
4	在内部	相离	相交 (R225)
5	在内部	在边界上	在内部 (R476)
6	相离	在边界上	相交 (R447)、相邻接 (R287)、在边界上 (R319)

针对每种组合情况进行分析后共可得出 11 种可能的线与体之间的拓扑关系,每种拓扑关系均客观存在(如图 1 所示),这说明基本线与体之间至少存在着这 11 种拓扑关系。

综上所述,基本线与体之间存在,且仅存在如图 1 所示的 11 种 9 交拓朴关系,因此定理成立。

证毕。

利用拓扑关系完备性可以大大减少 9 交模型表达的拓扑关系总数,例如基本线与体之间的拓扑关系可由理论上的 512 种减少为 11 种,同时也可简化空间对象的拓扑分析,例如对基本线与体之间拓扑关系进行分析,只需判断线 l 的两个边界点是否均位于体 b 的内部,即可判断出线 l 是否位于体 b 的内部。

4 复合线与体间拓扑关系完备性讨论

4.1 复合线与体之间拓扑关系

鉴于基本线与体之间的拓扑关系并不足以表达现实世界中其他更为复杂的线与体之间的拓扑关系,为此本文定义一类由基本线对象经过复合构成的复合线对象。

定义 7 复合线对象 复合线对象 \hat{l} (简称为复合线 \hat{l})由 $n(n > 1)$ 条基本线 l_1, l_2, \dots, l_n 连接而成

的线对象。 $\forall i(1 \leq i \leq n - 1): l_i$ 与 l_{i+1} 为相邻接关系 (R287),其首尾端点不相同,且内部不形成环。

复合线对象在 3 维空间中极为常见,可用于表示不分叉的道路、铁路等对象。图 2 即为一条复合线 \hat{l} ,根据 9 交模型的定义,设线 l_1 的一个端点 p_0 与线 l_n 的一个端点 p_n 分别为构成复合线 \hat{l} 的端点,则复合线 \hat{l} 的内部、边界和外部可分别形式化表示为

$$\hat{l}^\circ = \bigcup_{i=1}^n l_i - p_0 - p_n, \partial \hat{l} = p_0 \cup p_n, \hat{l}^- = \bigcap_{i=1}^n l_i^-$$

(根据 9 交模型定义,式中 l_i, p_0, p_n 等均表示构成该对象的闭包包括边界与内部)

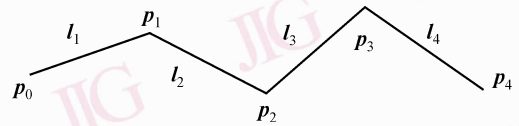


图 2 复合线 \hat{l}

Fig. 2 The compound line object of \hat{l}

基本 3 维空间对象之间的拓扑关系是进行复杂对象之间拓扑关系分析的基础,其分析思路是通过基本线之间两两不断复合的方法来推导出总的复合线与体之间的拓扑关系,以下引理证明了该方法的正确性。

引理 2 任意一条由 $n(n > 1)$ 条基本线 l_1, \dots, l_n 构成的复合线 \hat{l} 与体 b 之间的 9 交拓朴关系都由 l_1, \dots, l_n 与体 b , 以及构成 l_1, \dots, l_n 端点的点 p_0, p_1, \dots, p_n 与体 b 的 9 交拓朴关系所唯一确定。

证明 为证明此定理,可采用数学归纳法求得复合线 \hat{l} 与体 b 之间的 9 交拓朴关系:

当 $n=2$ 时,考察由线 l_1 与线 l_2 连接构成的复合线 \hat{l} 与体 b 之间的拓扑关系,由于每条基本线与体之间可能存在 8 种拓扑关系,例如,当线 l_1 与体 b 、线 l_2 与体 b 均为相离关系时,则可推导出复合线 \hat{l} 与体 b 之间也为相离关系。依次分析线 l_1 与体 b 、线 l_2 与体 b 的每种拓扑关系组合,即可推导出复合线 \hat{l} 与体 b 之间的拓扑关系。

假设对于由 $n(n > 1)$ 条基本线 l_1, \dots, l_n 构成的复合线对象,原结论成立。则对于 $n+1$ 的情况,此时 l_{n+1} 与 l_n 为相邻关系,其邻接点为 p_n ,而 p_{n+1} 则为 l_{n+1} 的另一个端点。

设 l_1, \dots, l_n 构成的复合线为 \tilde{l} , 其与体 b 之间的 9 交拓扑关系为 $\tilde{R} = [\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3 \tilde{r}_4 \tilde{r}_5 \tilde{r}_6 \tilde{r}_7 \tilde{r}_8 \tilde{r}_9]$, 线 l_{n+1} 与体 b 之间的 9 交拓扑关系为 $R = [r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9]$, l_1, \dots, l_n, l_{n+1} 构成的复合线 \hat{l} 与体 b 之间的 9 交拓扑关系为 $\hat{R} = [\hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{r}_3 \hat{r}_4 \hat{r}_5 \hat{r}_6 \hat{r}_7 \hat{r}_8 \hat{r}_9]$ 。

根据 9 交模型定义,有

$$\begin{aligned} \partial \hat{l} &= p_0 \cup p_{n+1} \\ \hat{l}^\circ &= \bigcup_{i=1}^{n+1} l_i - p_0 - p_{n+1} \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n l_i - p_0 - p_n \right) \cup p_n \cup l_{n+1}^\circ \\ &= \tilde{l}^\circ \cup l_{n+1}^\circ \cup p_n \\ \hat{l}^- &= \bigcap_{i=1}^{n+1} \tilde{l}_i^- = \tilde{l}^- \cap l_{n+1}^- \end{aligned}$$

分别求复合线 \hat{l} 与体 b 之间的 9 交拓扑关系 \hat{R} 以下的各个部分:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= \partial \hat{l} \cap \partial b = (p_0 \cup p_{n+1}) \cap \partial b \\ &= (p_0 \cap \partial b) \cup (p_{n+1} \cap \partial b) \\ \hat{r}_2 &= \hat{l}^\circ \cap b^\circ = (\tilde{l}^\circ \cup l_{n+1}^\circ \cup p_n) \cap b^\circ \\ &= (\tilde{l}^\circ \cap b^\circ) \cup (l_{n+1}^\circ \cap b^\circ) \cup (p_n \cap b^\circ) \\ &= \tilde{r}_2 \cup r_2 \cup (p_n \cap b^\circ) \\ \hat{r}_6 &= \hat{l}^- \cap \partial b = (\tilde{l}^- \cap l_{n+1}^-) \cap \partial b \\ &= (\tilde{l}^- \cap \partial b) \cap (l_{n+1}^- \cap \partial b) = \tilde{r}_6 \cap r_6 \end{aligned}$$

由假设及已知即可求出 $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_6$ 是否为空或非空集合, 且其结果可唯一确定。

同理, $\hat{r}_3, \hat{r}_4, \hat{r}_5, \hat{r}_7, \hat{r}_8, \hat{r}_9$ 等也可求得唯一结果, 因此可得到复合线 \hat{l} 与体 b 之间唯一的一种拓扑关系 \hat{R} 。

因此该引理成立。证毕。

4.2 复合线与体之间拓扑关系完备性

根据引理 2, 可进行复合线与体间拓扑关系的推导分析, 即可先将复合线对象分解为若干基本线对象, 分别求出这些基本线与体之间的拓扑关系; 然后利用复合的方法推导得出复合线与体之间的拓扑关系。最后利用该方法进行推导后可得到如下复合线与体之间拓扑关系的完备性定理。

定理 2 19 种 9 交拓扑关系构成了复合线与体之间拓扑关系的完备集。

证明: 设最简单的复合线 \hat{l} 由基本线段 l_1 (端点

为 p_0 与 p_1) 和 l_2 (端点为 p_1 与 p_2) 连接构成, 即 l_1 与 l_2 之间 9 交拓扑关系为相邻关系 (R287), 邻接点为 p_1 。分别考察 l_1 与体 b 和 l_2 与体 b, p_1 与体 b 之间的拓扑关系 R_1, R_2, \tilde{R} , 由定理 1 可推导出复合线 \hat{l} 与体 b 之间的 9 交拓扑关系 \hat{R} 。

经过一次复合后, 即可得到如表 3 所示的复合线与体间的拓扑关系表 (具体分析过程从略)。

表 3 中 D 表示相离关系, IT 表示相交关系, IN 表示在内部, M 表示相邻, ON 表示在表面, TB 表示被接触。横轴纵轴分别代表了线 l_1 与体 b 、线 l_2 与体 b 的 9 交拓扑关系, 如 IT/255 表示可用拓扑关系编码 255 来表示“在内部”的 9 交拓扑关系。据表 3 便可得到复合线 \hat{l} 与体 b 的 9 交拓扑关系。例如当线 l_1 与体 b 为相离关系 (R031), 线 l_2 与体 b 为相交关系 (R191) 时, 复合线 \hat{l} 与体 b 之间拓扑关系为相交 (R191)。空白单元格表示不可能存在这种拓扑关系组合。

此外, 某些情况下的推导需利用线 l_1 与线 l_2 之间的邻接点 p_1 与体 b 之间的拓扑关系, 如当线 l_1 和线 l_2 与体 b 的拓扑关系均为相交关系 (R255) 时, 则复合线 \hat{l} 与体 b 之间可能为 R253 或 R191 关系。此时, 如果点 p_1 与体 b 为在内部关系 (R156), 则复合线 \hat{l} 与体 b 之间为相交关系 (R191); 若点 p_1 与体 b 满足表面关系 (R029), 则复合线 \hat{l} 与体 b 之间拓扑关系为 9 交拓扑关系 R253。对于这种情况, 表 3 中用 253(D)/191(IN) 加以表示。由表 3 可知, 由两条基本线段构成的复合线与体之间的拓扑关系除了基本线段与体的 11 种之外, 还可能存在以下 7 种新的 9 交拓扑关系: R253、R285、R317、R444、R445、R508 和 R509 (加下划线表示)。

对于由 2 条以上基本线构成的复合线之间的拓扑关系, 根据引理 2, 也可通过不断复合的方法推导得出。可将表 3 中新增的 7 种 9 交拓扑关系加入推导表中, 作为已知拓扑关系。由于拓扑关系 R508 与在内部关系 (R476) 会推出一种新的 9 交拓扑关系 R252, 因此 R252 也应加入推导表中, 作为一种已知拓扑关系。在以后的推导中再未出现新的 9 交拓扑关系, 至此, 便得到了复合线与体之间的 9 交拓扑关系集合闭包。表 4 是最终得到的复合线与体之间的 9 交拓扑关系推导表 (为节省篇幅, 省去与表 3 中重复的部分)。

表 4 中列出了复合线与体之间拓扑关系的所有可能情况, 设 \hat{l}_1, \hat{l}_2 均为复合线, 横轴表示复合线 \hat{l}_1

与体 b 之间的拓扑关系 R_1 , 纵轴表示复合线 \hat{l}_2 与体 b 之间的拓扑关系 R_2 , 单元格内则表示了由两条复合线构成的复合线与体间的 9 交拓扑关系 R 。

除了基本线与体之间的 11 种拓扑关系, 即相离 (R031)、相交 (R191、R225、R447)、在内部 (R220、R412、R476)、相邻接 (R287)、位于边界 (R316、R319) 和被接触 (R063) 等 11 种外, 还可能存在着其他 8 种复合线与体所特有的 9 交拓扑关系, 分别是: R253、R285、R317、R444、R445、R508、R509 及 R252。在表 4 中加了下划线表示这些 9 交拓扑关系。类似 444(IN)/252(ON) 的表示也与表 3 相同, 其说明需要考察复合线之间连接点与体 b 之间的拓扑关系, 如果为在内部 (IN) 关系, 则最终 9 交拓扑

关系为 R444, 若为在表面 (ON) 关系, 则为 R252。由于再不可能推导出这 19 种拓扑关系之外的情况, 因此它们构成了复合线与体之间拓扑关系的完备集。

因此该定理成立。

证毕。

定理 2 的证明是建立在定理 1 的基础之上, 按照其证明方法和表 3、表 4 的拓扑关系推导, 利用基本线与体之间拓扑关系可推导出复合线与体之间的拓扑关系。通过比较定理 2 中得的复合线与体之间所有 19 种完备的拓扑关系与 Zlatanova 所做的工作^[11]发现, 正好与其利用 8 条否定规则得出的 19 种线串与体之间的拓扑关系一致, 这里线串与本文定义的复合线等价, 因此这也从另一方面验证了定理 1 和定理 2 的正确性。

表 3 由基本线 l_1 和 l_2 连接构成的复合线 l 与体 b 之间的拓扑关系推导表

Tab. 3 Reasoning table of topological relation between line l connected by segment l_1 and l_2 and body b

R	D/031	IT/191	IT/255	IT/447	IN/220	IN/412	IN/476	M/287	ON/316	ON/319	TB/063
D/031	D	IT/191	IT/255	IT/447				M		ON/319	TB
IT/191	IT/191	IT/191	IT/255	IT/447				IT/447		IT/447	IT/191
IT/255	IT/255	IT/255	<u>253(D)/191(IN)</u>	<u>509</u>	IT/255		IT/447	<u>509</u>		<u>509</u>	IT/255
IT/447	IT/447	IT/447	<u>509</u>	<u>445(D)/191(ON)</u>		IT/447	IT/255	<u>445(D)/191(ON)</u>	IT/447	<u>445(D)/191(ON)</u>	IT/447
IN/220			IT/255		IN/220		IN/476				
IN/412				IT/447		<u>444</u>	<u>508</u>	IT/447	<u>444</u>	IT/447	
IN/476			IT/447	IT/255	IN/476	<u>508</u>	IN/412	IT/255	<u>508</u>	IT/255	
M/287	M	IT/447	<u>509</u>	<u>445(D)/191(ON)</u>		IT/447	IT/255	<u>285(D)/063(ON)</u>	ON/319	<u>317(D)/063(ON)</u>	ON/319
ON/316				IT/447		<u>444</u>	<u>508</u>	ON/319	ON/316	ON/319	
ON/319	ON/319	IT/447	<u>509</u>	<u>445(D)/191(ON)</u>		IT/447	IT/255	<u>317(D)/063(ON)</u>	ON/319	<u>317(D)/063(ON)</u>	ON/319
TB/063	TB	IT/191	IT/255	IT/447				ON/319		ON/319	TB/063

表 4 复合线与体之间拓扑关系推导表 (省去了与表 3 中的重复部分)

Tab. 4 Reasoning table of topological relation between compound line l and body b

R	R <u>253</u>	R <u>285</u>	R <u>317</u>	R <u>444</u>	R <u>445</u>	R <u>508</u>	R <u>509</u>	R <u>252</u>
D/031								
IT/191								
IT/255	IT/255					IT/447	IT/447	IT/255
IT/447		IT/447	IT/447	IT/447	IT/447	IT/447	IT/255	
IN/220	<u>253</u>					<u>508</u>	<u>509</u>	<u>252</u>
IN/412		<u>445</u>	<u>445</u>	<u>444</u>	<u>445</u>	<u>508</u>	<u>509</u>	
IN/476	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>508</u>	<u>509</u>	<u>444(IN)/252(ON)</u>	<u>445(IN)/253(ON)</u>	<u>508</u>
M/287		ON/319	ON/319	IT/447	IT/447	IT/255	IT/255	
ON/316		<u>317</u>	<u>317</u>	<u>444</u>	<u>445</u>	<u>508</u>	<u>509</u>	
ON/319		ON/319	ON/319	IT/447	IT/447	IT/255	IT/255	
TB/063								
R253	<u>253</u>					<u>509</u>	<u>509</u>	<u>252</u>
R285		<u>317</u>	<u>317</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	
R317		<u>317</u>	<u>317</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	
R444		<u>445</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>508</u>	<u>509</u>	
R445		<u>445</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>445</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	
R508	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>508</u>	<u>509</u>	<u>444(IN)/252(ON)</u>	<u>445(IN)/253(ON)</u>	<u>508</u>
R509	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>509</u>	<u>445(IN)/253(ON)</u>	<u>445(IN)/253(ON)</u>	<u>509</u>
R252	<u>253</u>					<u>508</u>	<u>509</u>	<u>252</u>

5 利用完备性进行复杂线对象的分析

除了第 3 节和第 4 节讨论的基本线和复合线以外,现实世界中还存在着更为复杂的空间对象,对它们之间存在的拓扑关系直接进行分析比较困难。但由于任何复杂空间对象都可看作是由多个简单对象通过交、并、差等布尔操作组合而成,因此可根据基本空间对象间的拓扑关系的推导分析来得出复杂空间对象间的拓扑关系。

以下定义一类由多条复合线对象复合而成的复杂的线对象,可认为它是 3 维空间中最为复杂的一类线对象。

定义 8 复杂线 复杂线对象 L (简称为复杂线 L) 是由 n ($n > 1$) 条复合线或基本线 $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n$ 在内部节点连接或通过共享公共线段的方式而复合构成的线对象,不仅其内部不形成封闭环,而且其边界点多于 2 个(如图 3 所示)。



图 3 复杂线 L (黑色为复合线 \hat{l}_1 , 灰色为复合线 \hat{l}_2 , 中间粗线段为二者的公共部分)

Fig. 3 Complicated line L (compound line \hat{l}_1 is black, \hat{l}_2 is gray, and common part of them is the bold segment)

利用对象间拓扑关系的完备性也简化复杂空间对象间拓扑关系的分析。第 3 节得到的基本线与体之间的 11 种完备的拓扑关系,以及第 4 节中得到的复合线与体之间存在的 19 种完备的拓扑关系,对于分析 3 维空间中更为复杂的线与体之间的拓扑关系有着极为重要的价值。由于利用基本空间对象间存在的完备的拓扑关系进行复杂空间对象拓扑关系的推导分析,不会产生冗余和缺失情况,因此能充分保证拓扑分析结果的正确性。可证明有如下定理成立。

定理 3 任意一条复杂线与体之间的拓扑关系可由构成复杂线的基本线与体之间的拓扑关系推导分析得出。

证明 设复杂线 L 由 n 条复合线 l_1, \dots, l_n 构成,通过已知条件对复杂线 L 重新进行适当分解来得到 k 条复合线 $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_k$ (如图 3 中所示的 \hat{l}_1 和

\hat{l}_2),使其满足如下条件:

$$(1) \forall i \in \{1, \dots, k\}, \partial \hat{l}_i \subseteq \partial L;$$

$$(2) \bigcup_{i=1}^k \hat{l}_i = L.$$

首先利用第 4 节中讨论的方法求出所有复合线 \hat{l}_i ($1 \leq i \leq n$) 与体 b 之间的 9 交拓扑关系,设其表示为 $\hat{R}_i = [\hat{r}_{i,1} \hat{r}_{i,2} \hat{r}_{i,3} \hat{r}_{i,4} \hat{r}_{i,5} \hat{r}_{i,6} \hat{r}_{i,7} \hat{r}_{i,8} \hat{r}_{i,9}]$ 。

设复杂线 L 与体 b 之间的 9 交拓扑关系为 $R = [r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9]$,则根据 9 交模型定义,有

$$\partial L = \bigcup_{i=1}^k \partial \hat{l}_i, L^{\circ} = \bigcup_{i=1}^k \hat{l}_i^{\circ}, L^{-} = \bigcap_{i=1}^k \hat{l}_i^{-}$$

分别求复杂线 L 与体 b 之间的 9 交拓扑关系 R 的各个部分,有

$$r_1 = \partial L \cap \partial b = \bigcup_{i=1}^k \partial \hat{l}_i \cap \partial b = \bigcup_{i=1}^k (\partial \hat{l}_i \cap \partial b) = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,1}$$

$$r_2 = L^{\circ} \cap b^{\circ} = \bigcup_{i=1}^k \hat{l}_i^{\circ} \cap b^{\circ} = \bigcup_{i=1}^k (\hat{l}_i^{\circ} \cap b^{\circ}) = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,2}$$

$$r_6 = L^{-} \cap \partial b = \bigcap_{i=1}^k \hat{l}_i^{-} \cap \partial b = \bigcap_{i=1}^k (\hat{l}_i^{-} \cap \partial b) = \bigcap_{i=1}^k \hat{r}_{i,6}$$

同理,

$$r_3 = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,3}, r_4 = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,4}, r_5 \neq \emptyset, r_7 = \bigcap_{i=1}^k \hat{r}_{i,7},$$

$$r_8 = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,8}, r_9 = \bigcup_{i=1}^k \hat{r}_{i,9}$$

这样就得到复杂线 L 与体 b 之间唯一的一种拓扑关系 R 。

因此定理成立。

证毕。

根据定理 3 的证明以及表 3、表 4 的拓扑关系推导,下面给出求任意复杂线 L 与体 b 之间 9 交拓扑关系的分析算法:

输入:复杂线 L 与体 b

输出:复杂线 L 与体 b 之间的 9 交拓扑关系 R

{

//将复杂线 L 重新适当分解为 n 条复合线,

//要求满足定理 3 证明中的条件

$$\{l_1, l_2, \dots, l_n\} = \text{decompose}(L);$$

//以下求出复合线 l_i 与体 b 之间的拓扑关系

$$R_i = [r_{i,1} r_{i,2} r_{i,3} r_{i,4} r_{i,5} r_{i,6} r_{i,7} r_{i,8} r_{i,9}];$$

for ($i = 1; i < = n; i++$)

$$R_i = \text{topological_relation}(l_i, b);$$

//以下求 L 与 b 间的 9 交拓扑关系编码 R

$$r_1 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,1}; r_2 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,2}; r_3 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,3}; r_4 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,4}; r_5 \neq \emptyset;$$

$$r_6 = \bigcap_{i=1}^k r_{i,6}; r_7 = \bigcap_{i=1}^k r_{i,7}; r_8 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,8}; r_9 = \bigcup_{i=1}^k r_{i,9};$$

$$R = [r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9];$$

```
return R;
```

设复杂线 L 与体 b 的顶点数分别为 n 和 m , 其中分析基本线与体的时间复杂度为 $O(m \log m)^{[15]}$, 则总的算法时间复杂度为 $O(nm \log n \log m)$ 。

上述算法是建立在已知基本线与体之间拓扑关系的基础之上, 而基本线与体之间拓扑关系的分析则需要知晓线与点、线与线或线与面之间的拓扑关系。点与线之间的拓扑关系有: 点位于线外、点位于线上; 线与线之间的拓扑关系主要有相离、相邻接、包含、在内部、相等、相覆盖、相交、相接触等。而线与面之间的拓扑关系则有相离、相交、在内部、相邻接、在边界上、相接触、被接触等。

利用这些拓扑关系就可先求出基本线与体之间的 9 交拓扑关系(如 3.1 节讨论), 可能为相离、相交、在内部、相邻接、位于边界和被接触中的一种, 便可利用算法得出复杂线与体之间的 9 交拓扑关系。由于利用了拓扑关系的完备性, 因此本文算法相对于其他算法, 可更为高效准确地进行复杂线与体的拓扑分析。

6 结 论

拓扑关系作为一种极为重要的空间关系, 需要全面对其进行研究。本文利用 9 交模型、否定规则和复合推导, 对点与体、基本线与体、复合线与体之间的拓扑关系进行了分析, 分别得出了 3 种、11 种以及 19 种 9 交拓扑关系, 并证明了其具有完备性, 而利用这些对象间的完备拓扑关系即可准确高效地推导出复杂线与体之间的拓扑关系。

笔者正在研究其他 3 维空间对象间拓扑关系的完备性, 如线与线、线与面、面与体、体与体, 由于篇幅关系, 将另文发表。系统地研究 3 维空间基本对象间拓扑关系完备性将有利于进行复杂 3 维空间对象间拓扑关系的推理分析。

参考文献 (References)

- 1 Worboys M F. A generic model for planar geographical objects [J]. *International Journal of Geographical Information Systems*, 1992, **6**(5): 353-372.
- 2 Liu Ya-bing, Liu Da-you. Reasoning of topology spatial objects in GIS

- [J]. *Journal of Software*, 2001, **12**(12): 1859-1863. [刘亚彬, 刘大有. 地理信息系统中空间对象间拓扑关系的推理[J]. *软件学报*, 2001, **12**(12): 1859-1863.]
- 3 Yu Qiang-yuan, Liu Da-you, Xie Qi. A survey of analysis methods of topological relations between spatial regions [J]. *Journal of Software*, 2002, **14**(4): 777-782. [虞强源, 刘大有, 谢琦. 空间区域拓扑关系分析方法综述[J]. *软件学报*, 2002, **14**(4): 777-782.]
- 4 Randell D, Zhan Cui, Cohn A. A spatial logic based on regions and connection [A]. In: Bernhard Nebel, *et al.*, eds: *Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning [C]*, San Mateo, California, USA: Morgan Kaufmann, 1992: 165-176.
- 5 Cohn A G, Bennett B, Goody J, *et al.* Qualitative spatial representation and reasoning with the region connection calculus [J]. *Geoinformatica*, 1997, **1**(1): 11-44.
- 6 Egenhofer M J. Reasoning about binary topological relations [A]. In: Gunther O, Schek H J, eds: *Lecture Notes in Computer Science [C]*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991, **525**: 143-160.
- 7 Clementini E, Paolino D E. A comparison of methods for representing topological relationships [J]. *Information Sciences*, 1995, **3**(3): 149-178.
- 8 Egenhofer M J, Clementini E, Di Felice P. Topological relations between regions with holes [J]. *International Journal of Geographical Information Systems*, 1994, **8**(2): 129-144.
- 9 Egenhofer M J. Deriving the composition of binary topological relations [J]. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1994, **5**(2): 133-149.
- 10 Zhao Ren-liang, Chen Jun, Li Zhi-lin, *et al.* Spatial relation operations on the basis of V91 [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 2000, **25**(4): 318-323. [赵仁亮, 陈军, 李志林等. 基于 V91 的空间关系映射与操作 [J]. *武汉测绘科技大学学报*, 2000, **25**(4): 318-323.]
- 11 Zlatanova S. 3D GIS for Urban Development [D]. Ph. D Dissertation, Hengelosestraat, Netherlands: International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation (ITC), 2000.
- 12 Ryden K. OpenGIS Implementation Specification for Geographic Information-Simple Feature Access-part 1: Common Architecture [EB/OL]. <http://www.opengeospatial.org/standards/sfa>, 2005-11-22.
- 13 Bric V. 3D Vector Data Structures and Modelling of Simple Objects in GIS [D]. Ph. D Dissertation, Hengelosestraat, Netherlands: International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation (ITC), 1993.
- 14 Chen Jun, Li Cheng-ming, Li Zhi-lin, *et al.* A voronoi-based 9-intersection model for spatial relations [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2001, **15**(3): 201-220.
- 15 Schneider P J, Eberly D H. (Zhou Chang-fa Translate). *Geometric Tools for Computer Graphics [M]*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005. [Schneider P J, Eberly D H 著. (周长发译). *计算机图形学几何工具算法详解 [M]*. 北京: 电子工业出版社, 2005.]